

### **Θέμα Α**

$$A_1 \rightarrow \gamma$$

$$A_2 \rightarrow \gamma$$

$$A_3 \rightarrow \delta$$

$$A_4 \rightarrow \gamma$$

$$A_5 \quad \alpha \rightarrow \Sigma \quad \beta \rightarrow \Lambda \quad \gamma \rightarrow \Sigma \quad \delta \rightarrow \Lambda \quad \varepsilon \rightarrow \Sigma$$

### **Θέμα Β**

**B<sub>1</sub> . Σωστό είναι το ii)**

$$C = \frac{Q}{V_c} \Rightarrow Q = C \cdot V_c = 20 \cdot 10^{-6} \cdot 20 = 4 \cdot 10^{-4} C$$

$$E_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{C} \Rightarrow E_0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{16 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot 10^{-5}} = 4 \cdot 10^{-3} J$$

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot L \cdot I^2 \Rightarrow E_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} \cdot 10^{-3} \cdot 36 = 2 \cdot 10^{-3} J$$

$$\Delta E = |ΔE| = 2 \cdot 10^{-3} J$$

**B<sub>2</sub> . Σωστό είναι το iii)**

$$u = \sigma \tau \alpha \theta \epsilon \rho \bar{\eta}$$

$$\lambda_1 f_1 = \lambda_2 f_2 \Rightarrow \lambda_2 = \frac{\lambda_1 f_1}{f_2} = \frac{\lambda_1 f_1}{3 f_1} = \frac{\lambda_1}{3} \Rightarrow \lambda_2 = 3 \lambda_1$$

$$d = 2\lambda_1 = 6\lambda_2$$

$$\left. \begin{array}{l} r_1 - r_2 = (2N+1) \frac{\lambda_2}{2} \\ r_1 + r_2 = d \end{array} \right\} \Rightarrow 2r_1 = (2N+1) \frac{\lambda_2}{2} + 6\lambda_2 \Rightarrow r_1 = (2N+1) \frac{\lambda_2}{4} + 3\lambda_2$$

$$0 \leq r_1 \leq d \Rightarrow 0 \leq (2N+1) \frac{\lambda_2}{4} + 3\lambda_2 \leq 6\lambda_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow -6,5 \leq N \leq 5,5$$

επειδή  $\kappa \in \mathbb{Z}$  τότε  $N = -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$  που είναι 12 ακέραιες τιμές.  
Άρα 12 υπερβολές απόσβεσης.

**B<sub>3</sub> . Σωστό είναι το ii)**

Επειδή δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις που να έχουν ροπή ισχύει:

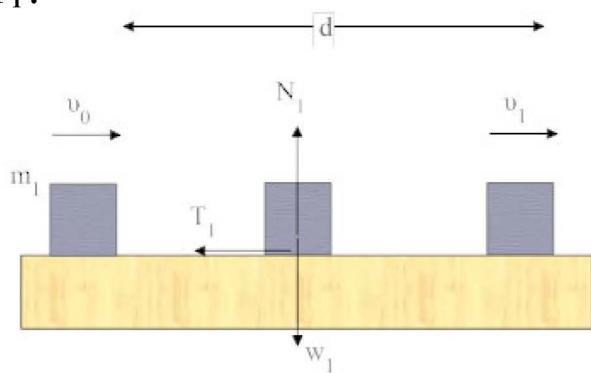
$$\sum \tau_{\varepsilon\xi} = 0$$

$$A\rho\alpha \text{ A.D.S. } L_{\alpha\rho\chi} = L_{\nu\varepsilon\lambda} \Rightarrow I_1\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = \left(I_1 + \frac{I_1}{4}\right)\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{4}{5}\omega_1$$

$$A\rho\alpha \quad |\Delta L_1| = |L_{\nu\varepsilon\lambda} - L_{\alpha\rho\chi}| = |I_1\omega_1 - I_1\omega_2| = |I_1\omega_1 - I_1 \frac{4}{5}\omega_1| = \frac{1}{5}I_1\omega_1 = \frac{1}{5}L_1$$

### Θέμα Γ

Γ1.



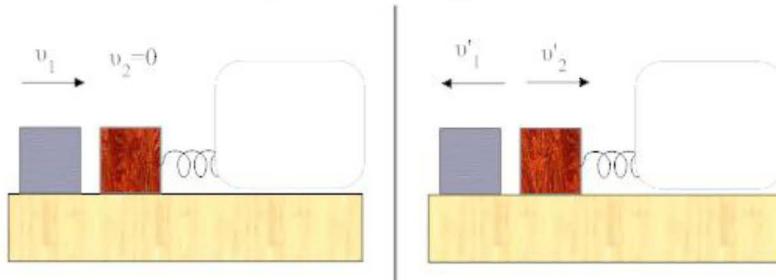
Εφαρμόζοντας ΘΜΚΕ για το σώμα  $m_1$  από την θέση (σε απόσταση  $d$  από το  $m_2$ ) μέχρι τη θέση πριν την κρούση με το  $m_2$  έχουμε:

$$\Delta K = W_{\Sigma F} \Rightarrow K_{1\text{rel}} - K_{1\alpha\rho\chi} = W_{T_1} \Rightarrow \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_1u_0^2 = -T_1d \Rightarrow \frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_1u_0^2 = -\mu N_1 d \quad (1)$$

Επειδή όμως για το σώμα  $m_1$   $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = m_1g$  από την (1) έχουμε:

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 - \frac{1}{2}m_1u_0^2 = -\mu m_1 g d \Rightarrow u_1^2 - u_0^2 = -2\mu g d \Rightarrow u_0 = \sqrt{u_1^2 + 2\mu g d} \quad (2)$$

Όμως η κρούση του  $m_1$  με το  $m_2$  είναι κεντρική και ελαστική ισχύει η Α.Δ.Ο. και η Α.Δ.Κ.Ε



Αν  $u_1$  η ταχύτητα του σώματος  $m_1$  πριν την κρούση και  $u_1'$  μετά την κρούση, τότε:

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow u_1' = \frac{m_1 - 2m_1}{m_1 + 2m_1} u_1 \Rightarrow u_1' = \frac{-m_1}{3m_1} u_1 \Rightarrow -\sqrt{10} = -\frac{u_1}{3} \Rightarrow u_1 = 3\sqrt{10} \text{ m/s}$$

Από την σχέση (2) έχουμε:

$$u_0 = \sqrt{(3\sqrt{10})^2 + 2 \cdot 0.5 \cdot 10 \cdot 1} = \sqrt{100} = 10 \text{ m/s}$$

### Γ2 .

Μετά την κρούση το σώμα  $m_2$  θα αποκτήσει ταχύτητα:

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \Rightarrow u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + 2m_1} u_1 = \frac{2m_1}{3m_1} 3\sqrt{10} \Rightarrow u_2' = 2\sqrt{10} \text{ m/s}$$

Άρα το ποσοστό θα είναι:

$$\pi = \frac{K_2'}{K_1} 100\% = \frac{\frac{1}{2} m_2 u_2'^2}{\frac{1}{2} m_1 u_1^2} 100\% = \frac{2m_1 (2\sqrt{10})^2}{m_1 (3\sqrt{10})^2} 100\% = \frac{80}{90} 100\% = 88.88\%$$

### Γ3 .

Το σώμα  $m_1$  αρχικά θα χρειαστεί χρόνο  $t_1$  για να διανύσει την απόσταση  $d$  και εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση λόγω της τριβής.

Από το 2<sup>o</sup> Νόμο Newton:

$$\Sigma F = m_1 a \Rightarrow a = \frac{\Sigma F}{m_1} = \frac{T}{m_1} = \frac{\mu N}{m_1} = \frac{\mu m_1 g}{m_1} \Rightarrow a = 5 \text{ m/s}^2$$

Οπότε από την εξίσωση της ταχύτητας:

$$u_1 = u_0 - at_1 \Rightarrow t_1 = \frac{u_0 - u_1}{a} = \frac{10 - 3\sqrt{10}}{5} = \frac{10 - 3 \cdot 3.2}{5} \Rightarrow t_1 = 0.08 \text{ s}$$

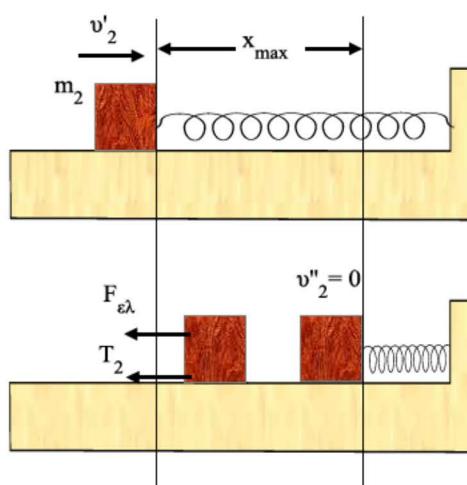
Στην συνέχεια μετά την κρούση το σώμα  $m_1$  κάνει επιβραδυνόμενη κίνηση για χρόνο  $t_2$  με  $a=5 \text{ m/s}^2$  μέχρι να σταματήσει:

$$u_{tel} = u_1' - at_2 \Rightarrow 0 = u_1' - at_2 \Rightarrow t_2 = \frac{u_1'}{a} = \frac{\sqrt{10}}{5} \Rightarrow t_2 = 0.64 \text{ s}$$

Επομένως ο συνολικός χρόνος κίνησης του σώματος είναι:

$$t_{\text{ol}} = t_1 + t_2 \Rightarrow t_{\text{ol}} = 0.72 \text{ s}$$

### Γ4 .



Κάνοντας Θ.Μ.Κ.Ε. για το σώμα  $m_2$  μετά την κρούση έχουμε:

$$\Delta K = W_{\Sigma F} \Rightarrow K_{2 \tau \varepsilon \lambda} - K_{2 \alpha \rho \chi} = W_{T_2} + W_{F \varepsilon \lambda} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = -\Delta U_{\varepsilon \lambda} - T_2 x_{\max} \Rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = U_{\varepsilon \alpha \rho \chi} - U_{el_{st}} - T_2 x_{\max} \Rightarrow 0 - \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = 0 - \frac{1}{2} k x_{\max}^2 - \mu N_2 x_{\max} \quad (3)$$

Επειδή όμως για το σώμα  $m_2$   $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_2 = m_2 g$  από την (3) έχουμε:

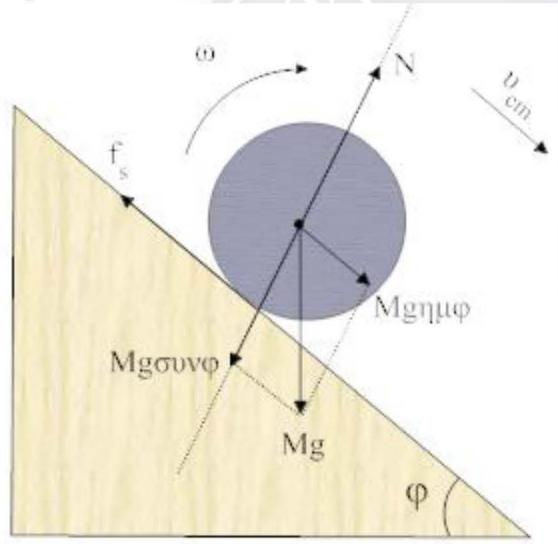
$$0 - \frac{1}{2} m_2 u_2'^2 = 0 - \frac{1}{2} k x_{\max}^2 - \mu m_2 g x_{\max} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (2\sqrt{10})^2 = \frac{1}{2} \cdot 105 \cdot x_{\max}^2 + 0.5 \cdot 1 \cdot 10 \cdot x_{\max} \Rightarrow$$

$$105 \cdot x_{\max}^2 + 10 \cdot x_{\max} - 40 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_{\max} = -\frac{14}{21} < 0, \text{ απορρίπτεται} \\ x_{\max} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7} m, \text{ δεκτή} \end{cases}$$

Άρα η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου είναι:  $x_{\max} = \frac{4}{7} m$

### Θέμα Δ

$\Delta_1$ .



Από κύλιση χωρίς ολίσθηση έχουμε:

$$x_{cm} = R\theta \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u_{cm} = R\omega \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a_{cm} = Ra_{\gamma\omega\nu}$$

$$\Sigma F = Ma_{cm} \Rightarrow w_x - f_s = Ma_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\phi - f_s = Ma_{cm} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow f_s R = \frac{1}{2} MR^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{a_{cm}=Ra_{\gamma\omega\nu}} f_s = \frac{1}{2} Ma_{cm} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow Mg\eta\mu\phi = \frac{3}{2} M\alpha_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2g\eta\mu\phi}{3}$$

$\Delta_2$ .

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

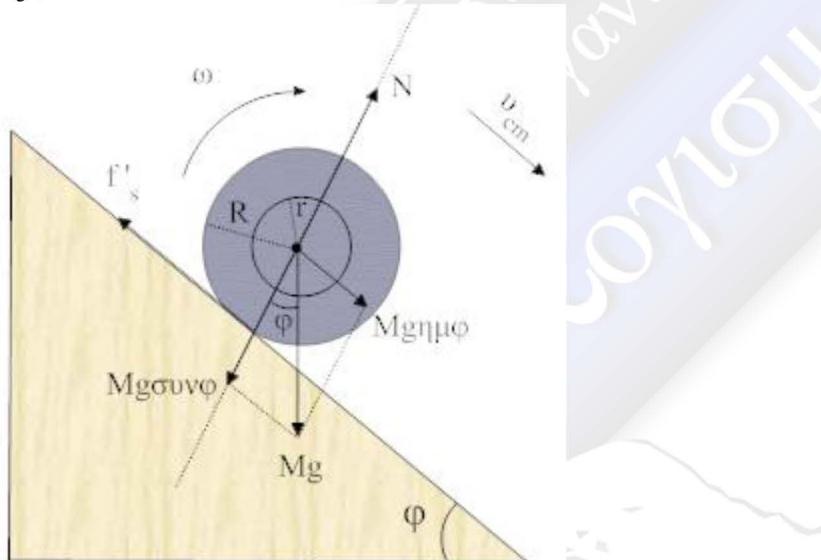
$$I_{\text{koiλ}} = I - I_{\tau\omega\pi} \quad \text{όπου } I_{\tau\omega\pi} = \frac{1}{2}mr^2$$

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{M}{V} \\ \rho &= \frac{m_{\tau\omega\pi}}{V_{\tau\omega\pi}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{M}{V} = \frac{m_{\tau\omega\pi}}{V_{\tau\omega\pi}} \Rightarrow \frac{M}{\pi R^2 h} = \frac{m_{\tau\omega\pi}}{\pi r^2 h} \Rightarrow m = \frac{Mr^2}{R^2}$$

Άρα:

$$I_{\text{koiλ}} = I - I_{\tau\omega\pi} = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}MR^2 - \frac{1}{2}\frac{Mr^2}{R^2}r^2 \Rightarrow I_{\text{koiλ}} = \frac{1}{2}MR^2 \left(1 - \frac{r^4}{R^4}\right)$$

$\Delta_3$ .



Καθώς το σύστημα κατέρχεται το κεκλιμένο, ο κοίλος κύλινδρος κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση. ( $x_{cm}' = R\theta' \xrightarrow{\frac{d}{dt}} u_{cm}' = R\omega' \xrightarrow{\frac{d}{dt}} a_{cm}' = Ra_{\gamma\omega\nu}'$ )

Ο εσωτερικός κύλινδρος ακτίνας  $r$  κάνει μόνο μεταφορική κίνηση, διότι δεν του ασκείται κάποια δύναμη που να έχει ροπή ως προς το κέντρο μάζας του ( $\Sigma\tau = 0$ ).

Άρα:

$$\Sigma F = Ma_{cm} \Rightarrow w_x - f_s = Ma_{cm} \Rightarrow Mg\eta\mu\phi - f_s = Ma_{cm} \quad (3)$$

$$\Sigma \tau = I_{\kappa\omega\lambda} \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow f_s R = \frac{1}{2} MR^2 \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) a_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{a_{cm} = Ra_{\gamma\omega\nu}} f_s = \frac{1}{2} M \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) a_{cm} \quad (4)$$

$$(3) + (4) \Rightarrow Mg\eta\mu\phi = M\alpha_{cm} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) \right] \Rightarrow a_{cm} = \frac{g\eta\mu\phi}{1 + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right)} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2g\eta\mu\phi}{3 - \frac{r^4}{R^4}}$$

$$\alpha_{cm} = \frac{2R^4 g\eta\mu\phi}{3R^4 - r^4}$$

**Δ4.**

$$\frac{K_{\mu\tau\phi}}{K_{\sigma\tau\phi}} = \frac{\frac{1}{2} Mu_{cm}^2}{\frac{1}{2} I_{\kappa\omega\lambda} \omega^2} = \frac{Mu_{cm}^2}{\frac{1}{2} MR^2 \left( 1 - \frac{r^4}{R^4} \right) \omega^2} \xrightarrow{u_{cm} = R\omega} \frac{K_{\mu\tau\phi}}{K_{\sigma\tau\phi}} = \frac{2}{1 - \frac{r^4}{R^4}} = \frac{2R^4}{R^4 - r^4} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\mu\tau\phi}}{K_{\sigma\tau\phi}} = \frac{2R^4}{R^4 - \left( \frac{R}{2} \right)^4} \Rightarrow \frac{K_{\mu\tau\phi}}{K_{\sigma\tau\phi}} = \frac{32}{15}$$